

Смешанные стратегии в операциях.

1. $i \in M_0 = \{1, 2\}$, $j \in N = \{1, 2\}$, $k = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$
 $k = 2$ — — — $\frac{1}{2}$

$$(F(i, j, 1)) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (F(i, j, 2)) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$p = (p_1, p_2)$ — смешанная стратегия оперирующей стороны.
Противник не знает реализации k и i .

Оценка эффективности

$$W(p_1) = \min_{j=1,2} \{p_1 \bar{F}(1, j) + (1-p_1) \bar{F}(2, j)\}, \text{ где}$$

$$(\bar{F}(i, j)) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ — усреднённый критерий.}$$

Наилучший гарантированный результат в смеш. стратегиях

$$F_c = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} W(p_1) \text{ — значение игры с матрицей } (\bar{F}(i, j))$$

$$6p_1 + 3(1-p_1) = 4p_1 + 5(1-p_1) \quad \left\{ \begin{aligned} (F(i, j, 1)) &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, (F(i, j, 2)) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

$2p_1 = 2(1-p_1) \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{2} \quad p^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ оптимальная смешанная стратегия $v_c = v = \frac{5}{2}$.

2. Пусть противник знает k , но реализацию i не знает. Тогда

$$W(p_1) = \frac{1}{2} \min_{j=1,2} [p_1 F(1, j, 1) + (1-p_1) F(2, j, 1)] + \\ + \frac{1}{2} \min_{j=1,2} [p_1 F(1, j, 2) + (1-p_1) F(2, j, 2)] =$$

$$= \frac{1}{2} \min [3p_1 + 5(1-p_1), 7p_1 + 3(1-p_1)] + \\ + \frac{1}{2} \min [9p_1 + 1(1-p_1), p_1 + 7(1-p_1)] = \frac{1}{2} \min [5 - 2p_1, 3 + 4p_1] + \\ + \frac{1}{2} \min [8p_1 + 1, 7 - 6p_1].$$

$$F_c' = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} W'(p_1) = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} \left\{ \frac{1}{2} \min(5 - 2p_1, 3 + 4p_1) + \frac{1}{2} \min(8p_1 + 1, 7 - 6p_1) \right\}.$$

$W'(p_1)$ - возмущающая кусочно-линейная функция.
 Она имеет две точки излома $5 - 2p_1 = 3 + 4p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$;
 $8p_1 + 1 = 7 - 6p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{3}{7}$.



$$0 \leq p_1 \leq \frac{1}{3} \quad W'(p_1) = \frac{1}{2}(3 + 4p_1 + 8p_1 + 1) = 2 + 6p_1$$

$$\frac{1}{3} \leq p_1 \leq \frac{3}{7} \quad W'(p_1) = \frac{1}{2}(5 - 2p_1 + 8p_1 + 1) = 3 + 3p_1$$

$$\frac{3}{7} \leq p_1 \leq 1 \quad W'(p_1) = \frac{1}{2}(5 - 2p_1 + 7 - 6p_1) = 6 - 4p_1.$$

$$p_1^0 = \frac{3}{7}$$

$$F_c' = 6 - 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{30}{7}. \quad p^0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7} \right).$$

$$3. (F(i, j, z)) = \begin{pmatrix} z & 4 \\ 5 & z \end{pmatrix}$$

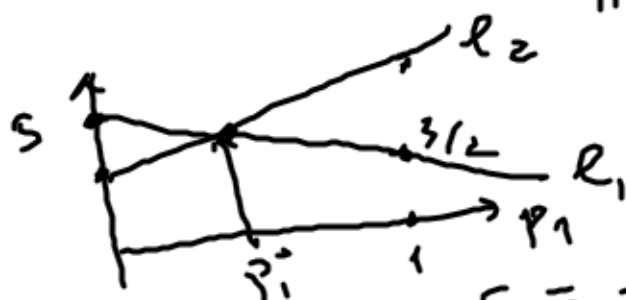
$z \in [0, 3]$ - случайная, равномерно распределённая сл. величина

Противник не знает z и i .

$$(\bar{F}(i, j)) = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W(p_1) = \min_{j=1,2} [p_1 \bar{F}(1, j) + (1-p_1) \bar{F}(2, j)] =$$

$$= \min \left[\frac{3}{2} p_1 + 5(1-p_1), 4p_1 + 3(1-p_1) \right]$$



$$F_c = \frac{2}{3} + \frac{25}{9} = \frac{31}{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} p_1 + 5(1-p_1) &= 4p_1 + 3(1-p_1) \\ 2(1-p_1) &= \frac{5}{2} p_1 \\ p_1^0 &= \frac{2}{2 + \frac{5}{2}} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

4. Пусть противник знает реализацию z .

Найти оценку эффективности стратегии $p' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ для произвольной смешанной стратегии $p = (p_1, 1-p_1)$

$$W(p_1) = \frac{1}{3} \int_0^3 \min_{j=1,2} [p_1 F(1, j, z) + (1-p_1) F(2, j, z)] dz =$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^3 \min [p_1 z + 5(1-p_1), 4p_1 + 2z(1-p_1)] dz$$

$$W(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \int_0^3 \min \left[\frac{2}{3}z + \frac{5}{3}, \frac{8}{3} + \frac{2z}{3} \right] dz =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[\frac{2}{3}z + \frac{5}{3} \right] dz = \frac{9}{9} + \frac{5}{3} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} < \frac{31}{9}.$$